A Escolha de Gauge em Teorias de Gauge na rede Alguns Exemplos

Orlando Oliveira
Centro de Física Computacional
Departamento de Física
Universidade de Coimbra
3000 Coimbra
Portugal

14 de Janeiro de 1999

1 O Problema Matemático

Em teorias de gauge, as variáveis fundamentais são elementos de um grupo de Lie G,

$$U_\mu(n) \tag{1}$$

onde $\mu = 1, \ldots, \mathcal{N}$, em que $\mathcal{N}$ é a dimensão do espaço considerado [2] e

$$n = (\, n_x,\, n_y,\, n_z,\, n_t \,) \tag{2}$$

com

$$n_x = 0, \ldots, N_X - 1 \tag{3}$$
$$n_y = 0, \ldots, N_Y - 1 \tag{4}$$
$$n_z = 0, \ldots, N_Z - 1 \tag{5}$$
$$n_t = 0, \ldots, N_T - 1 \tag{6}$$

identificando os pontos da rede espaço-tempo.

[2] Em Física, considera-se tipicamente $\mathcal{N} = 4$ e utilizam-se condições fronteia periodicas; isto é, se numa dada direcção a rede tiver N pontos, $U_\mu(N + \hat{\mathbf{e}}) = U_\mu(1)$, em que $\hat{\mathbf{e}}$ é o vector unitário que define a direcção em causa.

A escolha da gauge consiste em, dado um conjunto de links U_μ, definidos em todos os pontos da rede, minimizar a função

$$F[X] = \sum_{n,\mu} \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\left[X(n)\,U_\mu(n)\,X^\dagger(n + a\hat{\mathbf{e}}_\mu)\right] \tag{7}$$

em ordem a $X(n) \in G$.

2 Exemplo 1: Teoria Abeliana $G = U(1)$

Consideremos o caso em $G = U(1)$. Nesta situação temos

$$X(n) = \exp i\phi(n), \qquad U_\mu(n) = \exp iA_\mu(n), \tag{8}$$

sendo $\phi(n)$ e $A_\mu(n)$ funções reais de variável inteira; estas funções estão na algebra de Lie[1] de $U(1)$. Esta teoria descreve o electromagnetismo (QED). Distinguimos duas formulações:

$$\text{QED compacta} \qquad 0 \le \phi(n) < 2\pi$$

$$\text{QED não-compacta} \qquad \phi(n) \in R^{\mathcal{N}}$$

Com estas definições, a função a minimizar escreve-se

$$F[X] = \sum_{n,\mu} \cos\left\{[\phi(n) - \phi(n + a\hat{\mathbf{e}}_\mu)]\ A_\mu(n)\right\}. \tag{9}$$

e o sistema a resolver

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F[\phi]}{\partial \phi(n)} = \quad & \sum_\mu \sin\left\{[\phi(n) - \phi(n + a\hat{\mathbf{e}}_\mu)]\ A_\mu(n)\right\}\ A_\mu(n) \\ & - \sum_\mu \sin\left\{[\phi(n - a\hat{\mathbf{e}}_\mu) - \phi(n)]\ A_\mu(n - a\hat{\mathbf{e}}_\mu)\right\}\ A_\mu(n - a\hat{\mathbf{e}}_\mu) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

O sistema não parece ser dos mais simpáticos!

2.1 O problema em dimensão 1

Em dimensão 1, é possível encontrar uma solução para uma rede com apenas 3 pontos. O sistema a resolver é

$$\sin\left\{[\phi(0) - \phi(1)]\,A(0)\right\}\ A(0) = \sin\left\{[\phi(2) - \phi(0)]\,A(2)\right\}\ A(2)\,, \tag{11}$$

[1] No caso de grupos não-abelianos, a passagem à algebra de Lie quase nunca é exacta.

$$\sin\{[\phi(1) - \phi(2)]\,A(1)\}\;\; A(1) \,=\, \sin\{[\phi(0) - \phi(1)]\,A(0)\}\;\; A(0)\,, \tag{12}$$

$$\sin\{[\phi(2) - \phi(0)]\,A(2)\}\;\; A(2) \,=\, \sin\{[\phi(1) - \phi(2)]\,A(1)\}\;\; A(1)\,. \tag{13}$$

A solução das duas primeiras equações transforma a última numa preposição verdadeira. Para resolver (11) e (12) utilizamos a liberdade de gauge. Podemos efectuar uma transformação de gauge[2] por forma a que $U_\mu(0) = 1$, isto é podemos fazer $A(0) = 0$. O sistema simplifica-se

$$\sin\{[\phi(2) - \phi(0)]\,A(2)\}\;\; A(2) \,=\, 0, \tag{14}$$

$$\sin\{[\phi(1) - \phi(2)]\,A(1)\}\;\; A(1) \,=\, 0, \tag{15}$$

sendo a sua solução

$$[\phi(2) - \phi(0)]\,A(2)\;A(2) \,=\, k_{20}\pi, \tag{16}$$

$$[\phi(1) - \phi(2)]\,A(1)\;A(1) \,=\, k_{12}\pi, \tag{17}$$

em que k_{20} e k_{12} são números inteiros quaisquer. A função a minimizar escreve-se

$$\begin{aligned} F = \quad & \cos[(\,\phi(0) - \phi(1)\,)\,A(0)] + \cos[(\,\phi(1) - \phi(2)\,)\,A(1)] + \\ & \qquad \cos[(\,\phi(2) - \phi(0)\,)\,A(2)] \end{aligned} \tag{18}$$

$$= \quad 1 + \cos(k_{12}\pi) + \cos(k_{20}\pi). \tag{19}$$

Uma solução que minimiza $F[X]$ é

$$\phi(0) \,=\, 0, \qquad \phi(1) \,=\, \frac{(2i+1)\pi}{A(1)} + \frac{(2j+1)\pi}{A(2)}, \qquad \phi(2) \,=\, \frac{(2j+1)\pi}{A(2)}\,, \tag{20}$$

onde i e j são números inteiros quaisquer.

3 Exemplo 2: Caso geral em 1 dimensão

Se considerarmos o problema em 1 dimensão, a soma sobre μ deixa de existir. A função a minimizar é agora

$$F[X] \,=\, \sum_n \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\left[X(n)\,U_\mu(n)\,X^\dagger(n + a\hat{\mathbf{e}}_\mu)\right] \tag{21}$$

[2] Ver os textos anteriores.

$$= \quad \frac{1}{2}\sum_n \Big(X_{ij}(n)\, [U(n)]_{jk}\, X^*_{ik}(n+1) \;+\; X^*_{ij}(n)\, [U(n)]^*_{jk}\, X_{ik}(n+1) \Big) \tag{22}$$

$$= \quad \frac{1}{2}\sum_n \Big(X_{ij}(n)\, [U(n)]_{jk}\, X^*_{ik}(n+1) \;+\; X_{ik}(n) X^*_{ij}(n-1)\, [U(n-1)]^*_{jk} \Big)\, . \tag{23}$$

O sistema a resolver é

$$2\frac{\partial F[X]}{\partial X_{ij}(n)} \;=\; [U(n)]_{jk}\, X^*_{ik}(n+1) \;+\; X^*_{ik}(n-1)\, [U(n-1)]_{kj} \;=\; 0, \tag{24}$$

ou seja

$$U(n)X^\dagger(n+1) \;+\; U^\dagger(n-1)X^\dagger(n-1) \;=\; 0. \tag{25}$$

Para grupos unitários, em que a matriz inversa é a matriz transposta da conjugada, a solução deste sistema é

$$X(n+1) \;=\; -X(n-1)\, U(n-1)\, U(n). \tag{26}$$

Comentários :

- Em 1-d (uma dimensão), as matrizes envolvidas são todas elementos do grupo G.
- O sistema nem sempre tem solução. Por exemplo, para o grupo $SU(2)$ o sistema tem, aparentemente, solução (o simétrico de uma matriz SU(2) é uma matriz de $SU(2)$). Para o grupo $SU(3)$ (o grupo em que estamos interessados) o sistema não tem solução (neste caso o determinante da matriz $X(n+1)$ é -1, logo não está em $SU(3)$).
- A diferença para o caso de mais dimensões é que a matriz $U(n)$ é soma de matrizes de G, deizando de ser, na maioria dos casos, um elemento de G. Por exemplo, a soma de matrizes $SU(2)$ é uma matriz $SU(2)$. O grupo $SU(3)$ não é fechado relativamente à soma dos seus elementos.
- Em 4-d, a matriz $U(n)$ é geralmente uma matriz complexa, ou seja um elemento de $GL(4, C)$.